理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\,|\,x^2\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$　　答：A

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，则 $z=$　　答：D

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．《《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 位学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为　　答：C

A．0.5　　B．0.6　　C．0.7　　D．0.8

4．$(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为　　答：A

A．12　　B．16　　C．20　　D．24

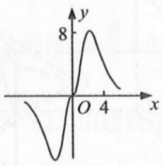
5．已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 15，且 $a_5=3a_3+4a_1$，则 $a_3=$　　答：C

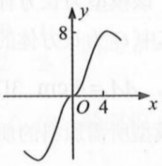
A．16　　B．8　　C．4　　D．2

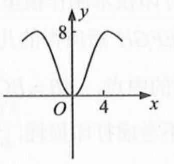
6．已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则　　答：D

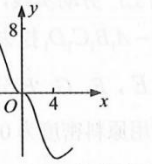
A．$a=\mathrm{e}$，$b=-1$　　B．$a=\mathrm{e}$，$b=1$　　C．$a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=1$　　D．$a=\mathrm{e}^{-1}$，$b=-1$

7．函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为　　答：B

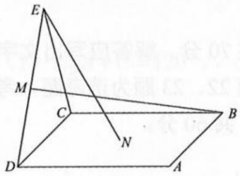
A．

B．

C．

D．

8．如图，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，$\triangle ECD$ 为正三角形，平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$，M 是线段 ED 的中点，则　　答：B



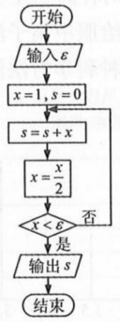
A．$BM=EN$，且直线 BM，EN 是相交直线

B．$BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是相交直线

C．$BM=EN$，且直线 BM，EN 是异面直线

D．$BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是异面直线

9．执行右边的程序框图，如果输入的 ε 为 0.01，则输出 s 的值等于　　答：C



A．$2-\dfrac{1}{2^4}$

B．$2-\dfrac{1}{2^5}$

C．$2-\dfrac{1}{2^6}$

D．$2-\dfrac{1}{2^7}$

10．双曲线 C：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的一条渐近线上，O 为坐标原点. 若 $|PO|=|PF|$，则 $\triangle PFO$ 的面积为　　答：A

A．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

11．设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则　　　　答：C

A．$f(\log_3\frac{1}{4})>f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})$　　　　B．$f(\log_3\frac{1}{4})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})$

C．$f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f(\log_3\frac{1}{4})$　　　　D．$f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})>f(\log_3\frac{1}{4})$

12．设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{5})(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点. 下述四个结论：

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点　　　　② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{10})$ 单调递增　　　　④ ω 的取值范围是 $[\frac{12}{5},\frac{29}{10})$

其中所有正确结论的编号是　　　　答：D

A．①④　　　　B．②③　　　　C．①②③　　　　D．①③④

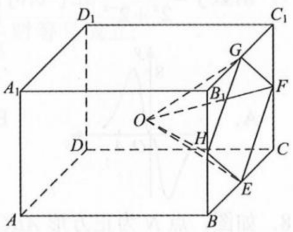
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$ $\underline{\frac{2}{3}}$．

14．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1\neq 0$，$a_2=3a_1$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=$ $\underline{\quad 4\quad}$．

15．设 F_1，F_2 为椭圆 C: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为 $\underline{(3,\sqrt{15})}$．

16．学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型. 如图，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6\text{ cm}$，$AA_1=4\text{ cm}$．3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3．不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为 $\underline{118.8}$ g．

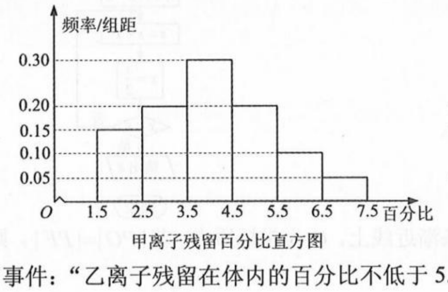


三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

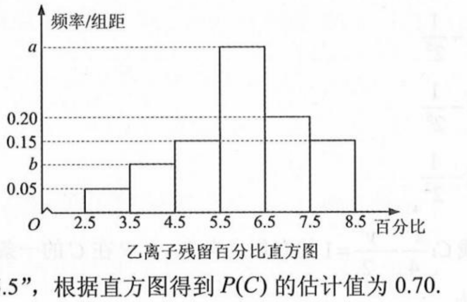
（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A，B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”，根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a，b 的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）．

解：

（1）由已知得 $0.70=a+0.20+0.15$，故

$a=0.35$．

$b=1-0.05-0.15-0.70=0.10$．

（2）甲离子残留百分比的平均值的估计值为

$$2\times0.15+3\times0.20+4\times0.30+5\times0.20+6\times0.10+7\times0.05=4.05.$$

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

$$3\times0.05+4\times0.10+5\times0.15+6\times0.35+7\times0.20+8\times0.15=6.00.$$

18．（12分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$．

（1）求 B；

（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c=1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围．

解：

（1）由题设及正弦定理得 $\sin A\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B\sin A$．

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin B$．

由 $A+B+C=180°$，可得 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$，故 $\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$．

因为 $\cos\dfrac{B}{2}\neq0$，故 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，因此 $B=60°$．

（2）由题设及（1）知 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$．

由正弦定理得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin(120°-C)}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\dfrac{1}{2}$．

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $0°<A<90°$，$0°<C<90°$．由（1）知 $A+C=120°$，所以 $30°<C<90°$，故 $\dfrac{1}{2}<a<2$，从而 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

因此，$\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$．

19．（12分）

图1是由矩形 $ADEB$，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$，$BE=BF=2$，$\angle FBC=60°$．将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连结 DG，如图2．

（1）证明：图2中的 A，C，G，D 四点共面，且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图2中的二面角 $B-CG-A$ 的大小．

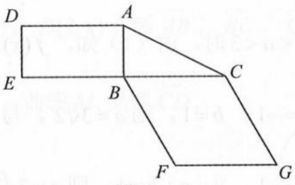


图1

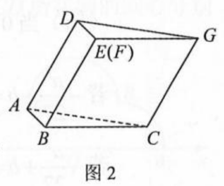


图2

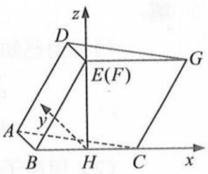
解：

（1）由已知得 $AD//BE$，$CG//BE$，所以 $AD//CG$，故 AD，CG 确定一个平面，从而 A，C，G，D 四点共面．

由已知得 $AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故 $AB\perp$ 平面 $BCGE$．

又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$．

（2）作 $EH \perp BC$，垂足为 H．因为 $EH \subset$ 平面 $BCGE$，平面 $BCGE \perp$ 平面 ABC，所以 $EH \perp$ 平面 ABC．



由已知，菱形 $BCGE$ 的边长为 2，$\angle EBC = 60°$，可求得 $BH = 1$，$EH = \sqrt{3}$．

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HC}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$，则

$A(-1,1,0)$，$C(1,0,0)$，$G(2,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$．

设平面 $ACGD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot \boldsymbol{n}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$．

又平面 $BCGE$ 的法向量可取为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，所以 $\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

因此二面角 $B-CG-A$ 的大小为 $30°$．

20.（12分）

已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）是否存在 a，b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a，b 的所有值；若不存在，说明理由．

解：

（1）$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$．

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup(\dfrac{a}{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,\dfrac{a}{3})$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\dfrac{a}{3},+\infty)$ 单调递增，在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 单调递减；

若 $a=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

若 $a<0$，则当 $x\in(-\infty,\dfrac{a}{3})\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\dfrac{a}{3},0)$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{a}{3})$，$(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(\dfrac{a}{3},0)$ 单调递减．

（2）满足题设条件的 a，b 存在．

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，由（1）知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $f(0)=b$，最大值为 $f(1)=2-a+b$．此时 a，b 满足题设条件当且仅当 $b=-1$，$2-a+b=1$，即 $a=0$，$b=-1$．

（ii）当 $a\geqslant 3$ 时，由（1）知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 $f(0)=b$，最小值为 $f(1)=2-a+b$．此时 a，b 满足题设条件当且仅当 $2-a+b=-1$，$b=1$，即 $a=4$，$b=1$．

（iii）当 $0<a<3$ 时，由（1）知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f(\dfrac{a}{3})=-\dfrac{a^3}{27}+b$，最大值为 b 或 $2-a+b$．

若 $-\dfrac{a^3}{27}+b=-1$，$b=1$，则 $a=3\sqrt[3]{2}$，与 $0<a<3$ 矛盾．

若 $-\dfrac{a^3}{27}+b=-1$，$2-a+b=1$，则 $a=3\sqrt{3}$ 或 $a=-3\sqrt{3}$ 或 $a=0$，与 $0<a<3$ 矛盾．

综上，当且仅当 $a=0$，$b=-1$ 或 $a=4$，$b=1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 -1，最大值为 1．

21.（12 分）

已知曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A，B.

（1）证明：直线 AB 过定点；

（2）若以 $E(0,\dfrac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求四边形 $ADBE$ 的面积.

解：

（1）设 $D(t,-\dfrac{1}{2})$，$A(x_1,y_1)$，则 $x_1^2=2y_1$.

由于 $y'=x$，所以切线 DA 的斜率为 x_1，故 $\dfrac{y_1+\dfrac{1}{2}}{x_1-t}=x_1$.

整理得 $2tx_1-2y_1+1=0$.

设 $B(x_2,y_2)$，同理可得 $2tx_2-2y_2+1=0$.

故直线 AB 的方程为 $2tx-2y+1=0$.

所以直线 AB 过定点 $(0,\dfrac{1}{2})$.

（2）由（1）得直线 AB 的方程为 $y=tx+\dfrac{1}{2}$. 由 $\begin{cases} y=tx+\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ 可得 $x^2-2tx-1=0$.

于是 $x_1+x_2=2t$，$x_1x_2=-1$，$y_1+y_2=t(x_1+x_2)+1=2t^2+1$，

$$|AB|=\sqrt{1+t^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+t^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2(t^2+1).$$

设 d_1，d_2 分别为点 D，E 到直线 AB 的距离，则 $d_1=\sqrt{t^2+1}$，$d_2=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}$.

因此，四边形 $ADBE$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|(d_1+d_2)=(t^2+3)\sqrt{t^2+1}$.

设 M 为线段 AB 的中点，则 $M(t,t^2+\dfrac{1}{2})$.

由于 $\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而 $\overrightarrow{EM}=(t,t^2-2)$，$\overrightarrow{AB}$ 与向量 $(1,t)$ 平行，所以 $t+(t^2-2)t=0$. 解得 $t=0$ 或 $t=\pm1$.

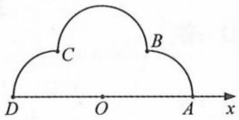
当 $t=0$ 时，$S=3$；当 $t=\pm1$ 时，$S=4\sqrt{2}$.

因此，四边形 $ADBE$ 的面积为 3 或 $4\sqrt{2}$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2,0)$，$B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$，$C(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4})$，$D(2,\pi)$，弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的圆心分别是 $(1,0)$，$(1,\dfrac{\pi}{2})$，$(1,\pi)$，曲线 M_1 是弧 $\overset{\frown}{AB}$，曲线 M_2 是弧 $\overset{\frown}{BC}$，曲线 M_3 是弧 $\overset{\frown}{CD}$.



（1）分别写出 M_1，M_2，M_3 的极坐标方程；

（2）曲线 M 由 M_1，M_2，M_3 构成，若点 P 在 M 上，且 $|OP|=\sqrt{3}$，求 P 的极坐标.

解：

（1）由题设可得，弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的极坐标方程分别为 $\rho=2\cos\theta$，$\rho=2\sin\theta$，$\rho=-2\cos\theta$．所以 M_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$，$M_2$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\ (\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4})$，$M_3$ 的极坐标方程为 $\rho=-2\cos\theta\ (\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi)$．

（2）设 $P(\rho,\theta)$，由题设及（1）知

若 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{6}$；

若 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，则 $2\sin\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{2\pi}{3}$；

若 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$，则 $-2\cos\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{5\pi}{6}$．

综上，P 的极坐标为 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$ 或 $(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$．

23．[选修4－5：不等式选讲]（10分）

设 x，y，$z\in\mathbf{R}$，且 $x+y+z=1$．

（1）求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值；

（2）若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{1}{3}$ 成立，证明：$a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$．

解：

（1）由于

$$\begin{aligned}&[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2\\&=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]\\&\leqslant3[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2],\end{aligned}$$

故由已知得 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 $x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，$z=-\frac{1}{3}$ 时等号成立．

所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$．

（2）由于

$$\begin{aligned}&[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2\\&=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]\\&\leqslant3[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2],\end{aligned}$$

故由已知得 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{(2+a)^2}{3}$，当且仅当 $x=\frac{4-a}{3}$，$y=\frac{1-a}{3}$，$z=\frac{2a-2}{3}$ 时等号成立．

因此 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$ 的最小值为 $\frac{(2+a)^2}{3}$．

由题设知 $\frac{(2+a)^2}{3}\geqslant\frac{1}{3}$，解得 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$．